

量子確率論を拡張する

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

量子確率論は、その名の通り量子論に触発されて定式化された確率論である [2, 3, 4]。通常現代的な意味での確率論は測度論的確率論であるが、測度論的確率論と量子確率論はほぼ同時期（1930年代）に定式化されはじまっており、双方を合わせて確率論が進展していつている。

代数的確率論・非可換確率論とも呼ばれる量子確率論は、代数に基づいて定式化される。特に、代数 \mathcal{A} の中でも $*$ -代数と呼ばれる、行列では随伴にあたる $*$ -演算（対合） $A \mapsto A^*$ をもつ代数を用いる場合に広く研究が行われている。 $*$ -代数 \mathcal{A} の元を確率変数と呼び、 \mathcal{A} の元のうち $A^* = A$ となる元を実確率変数と呼ぶ。そして、 $*$ -代数 \mathcal{A} とその上の状態（期待値汎関数） φ の組 (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間と呼ぶ。特に、代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) は \mathcal{A} が C^* -代数のとき C^* -確率空間と呼ばれる。測度論的確率論は事象に基づく確率論であり、確率変数とは可測写像のことである。しかし、一般に非可換代数を駆使する量子確率論において事象は測度論的な文脈で与えられるものと同じ意義があると考えすることはできない。確率変数・「確率過程」の両立性を前提としない理論構築が理論の難しさであり測度論的確率論とは異なる将来性があるのである。

C^* -代数的量子論とは、 C^* -代数に基づいて定式化される量子論のことであり、量子場など無限自由度量子系の記述に採用されている。通常公理系において、 C^* -確率空間 (\mathcal{X}, ω) を用いて量子系の統計的側面が指定されることを宣言する。 C^* -代数的量子論では Hilbert 空間は状態 ω が与えられるごとに GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ によりユニタリー同値を除いて一意に与えられる： \mathcal{H}_ω は Hilbert 空間、 Ω_ω は \mathcal{H}_ω の単位ベクトル、 π_ω は \mathcal{X} の \mathcal{H}_ω 上の表現で

$$\omega(X) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle, \quad X \in \mathcal{X} \quad (1)$$

および $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たすものである。ここで、 π が \mathcal{X} の \mathcal{H} 上の表現であるとは、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $X, Y \in \mathcal{X}$ に対し、 $\pi(X)$ は \mathcal{H} 上の有界線型作用素であり、 $\pi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi(X) + \beta\pi(Y)$, $\pi(XY) = \pi(X)\pi(Y)$, $\pi(X^*) = \pi(X)^*$ を満たすものことである（ $*$ -準同型写像）。数理論理的な物理モデルを豊富に例にもつ C^* -代数的量子論は量子確率論研究の動機の一つとなっている。

C^* -代数上の状態が一つ与えられると GNS 表現が構成されるが、いくつも状態があるなかで特定の表現・Hilbert 空間に固執する理由は必ずしもない。あるいは、異なる状態の GNS 表現の相互関係に関心を向けるのが自然である。これは、物理系のマクロな側面を記述し超選択則を提供するセクター理論 [5, 6] に直結する観点である。そのため、 \mathcal{X} の双対空間 \mathcal{X}^* の線型部分空間のうち、「中心部分空間」と呼ばれる部分空間に着目する（定義は [8] を参照）。中心部分空間の具体例を挙げよう。 π を \mathcal{H} 上の \mathcal{X} の表現とするとき、 \mathcal{X} 上の線型汎関数 φ が π -正規であるとは、 \mathcal{H} 上のトレースクラス作用素 σ で

$$\varphi(X) = \text{Tr}[\pi(X)\sigma], \quad X \in \mathcal{X} \quad (2)$$

となるものが存在するときを言う。このとき、 \mathcal{X} 上の π -正規線型汎関数の全体 $\mathcal{V}(\pi)$ は \mathcal{X}^* の中心部分空間である。また、 C^* -代数の重要なクラスである von Neumann 代数 \mathcal{M} の前双対空間 \mathcal{M}_* も \mathcal{M}^* の中心部分空間である。一般に中心部分空間は表現を介さず特徴づけられていることが本質で、表現を利用した (2) 式の表示を一旦忘れて（すなわち表現から自由な）議論が可能になる。

量子確率論を拡張するにあたり、 C^* -確率空間ではなく C^* -確率構造を用いることが本質的な第一歩である。 C^* -確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ とは、 C^* -代数 \mathcal{X}_a とその上の中心部分空間 \mathcal{V}_a の組のことである。 C^* -確率構造は系を記述する物理量代数と、「特定範囲」のセクターに台を持つ状態空間上の確率測度を「中心測度」にもつ状態の集まり（から張られる複素線型空間）を指定している。 C^* -確率空間は、ある C^* -確率構造の中心部分空間において状態を一つ選んだ特殊な状況であるという出発点の転換である。

C^* -確率構造を用いる利点は、圏論的枠組みとの親和性にある。量子系の記述を目的とし、 C^* -確率構造を対象にもつ圏論的枠組みの候補は1つではない。すなわち、対象が C^* -確率構造 a, b, \dots で量子系の統計的側面を記述し、射

$$b \leftarrow a : f \tag{3}$$

が量子系の変化・動力学の記述に対応するような圏はいくつも考えられるのである。 C^* -確率構造を対象とすることで状態遷移の過程を射とする視点が明確化されるのである。著者が考える、射の候補は「遷移確率」および「インストルメント」である（インストルメントについては [7, 8] を参照）。遷移確率を射とする圏が「状態遷移の圏」であり、インストルメントを射とする圏が「インストルメントの圏」である。圏論の定義では射に結合律が課されており、結合律が満たされる射の集まりしか許されないという制約がある。どちらの圏も伝統的な量子論から近年の研究まで統一的視点から捉えるために本質的に役立つ。異なる C^* -確率構造への遷移がある系に著者は興味がある。

本稿で述べられなかった重要な観点が、量子確率過程による系のダイナミクスの記述である [1]。 \mathcal{X} と \mathcal{Y} を C^* -代数とし、 T を時間に関するパラメータの集合とすると、各 $t \in T$ に対し $*$ -準同型 $j_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ の集まり $\{j_t\}_{t \in T}$ を量子確率過程と呼ぶ。これは Heisenberg 描像でのダイナミクスの記述、特に、相関関数をベースとした系の解析を量子確率論の文脈で可能にしたものである。

本稿で紹介した内容の動機となったのは「モビリティの圏」の研究 [9] である。モビリティの圏は、ソフトロボティクスなど（量子論に限らない）広い考察対象での状態遷移を扱うための枠組みを圏論的方法により構築する試みの中で定義されたものである。本稿の試みはモビリティの圏と比べれば量子論という限られた対象を扱っているが、 C^* -確率構造を対象とする圏を用いた量子系のダイナミクスの記述は量子論の枠組みの拡張に貢献すると考えている。

参考文献

- [1] L. Accardi, A. Frigerio and J.T. Lewis, Quantum stochastic processes, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 97–133.
- [2] 明出伊 類似, 尾畑 伸明, 『量子確率論の基礎』, (オーム社, 2021) .
- [3] A. Hora and N. Obata, *Quantum probability and spectral analysis of graphs*, (Springer, Berlin, 2007).
- [4] 大津 元一, 小嶋 泉 編著, 『ここからはじまる量子場 —ドレスト光子が開くオフシェル科学—』, (朝倉書店, 2020).
- [5] 小嶋 泉, 『量子場とマイクロ・マクロ双対性』, (丸善出版, 2013) .
- [6] 小嶋 泉, 岡村 和弥, 『無限量子系の物理と数理』, (サイエンス社, 2013) .
- [7] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, J. Math. Phys. **57** (2016), 015209.
- [8] K. Okamura, Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum Fields, Symmetry **13**, (2021) 1183. <https://doi.org/10.3390/sym13071183>

- [9] H. Saigo, M. Naruse, K. Okamura, H. Hori, and I. Ojima, Analysis of Soft Robotics Based on the Concept of Category of Mobility, Complexity **2019** (2019), 1490541. <https://doi.org/10.1155/2019/1490541>